Modellierungen und Anpassungen von LFA-Modellen für die Untersuchung der Vorderseitendynamik

Amir Shandy, Frank Hemberger, Matthias Zipf, Thomas Stark, Jochen Manara, Jürgen Hartmann
AK Thermophysik, 21.03.2024

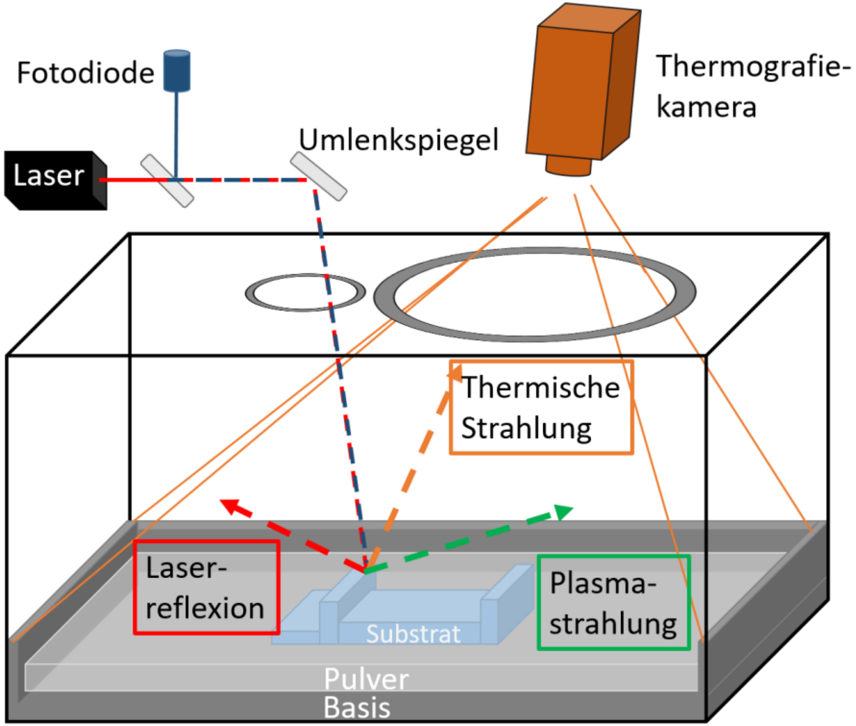
Technische Hochschule Würzburg-Schweinfurt

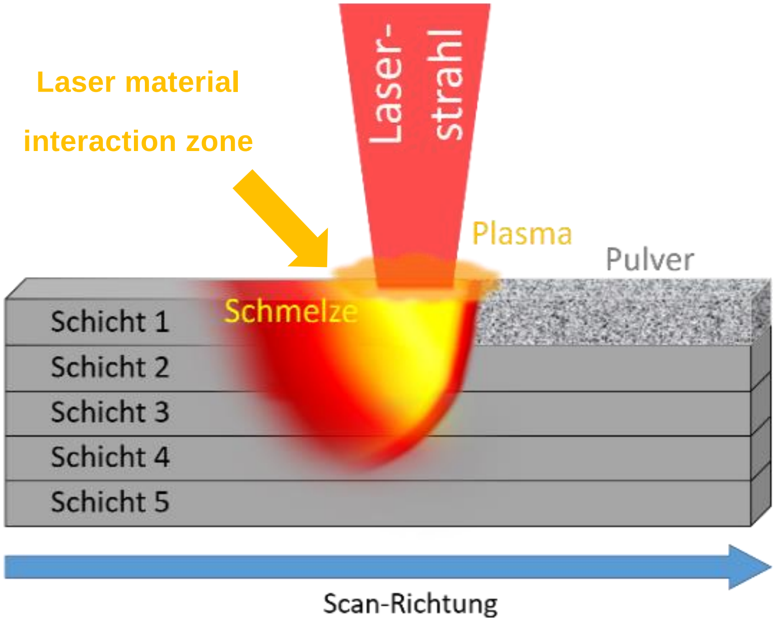
zero carbon

Gliederung

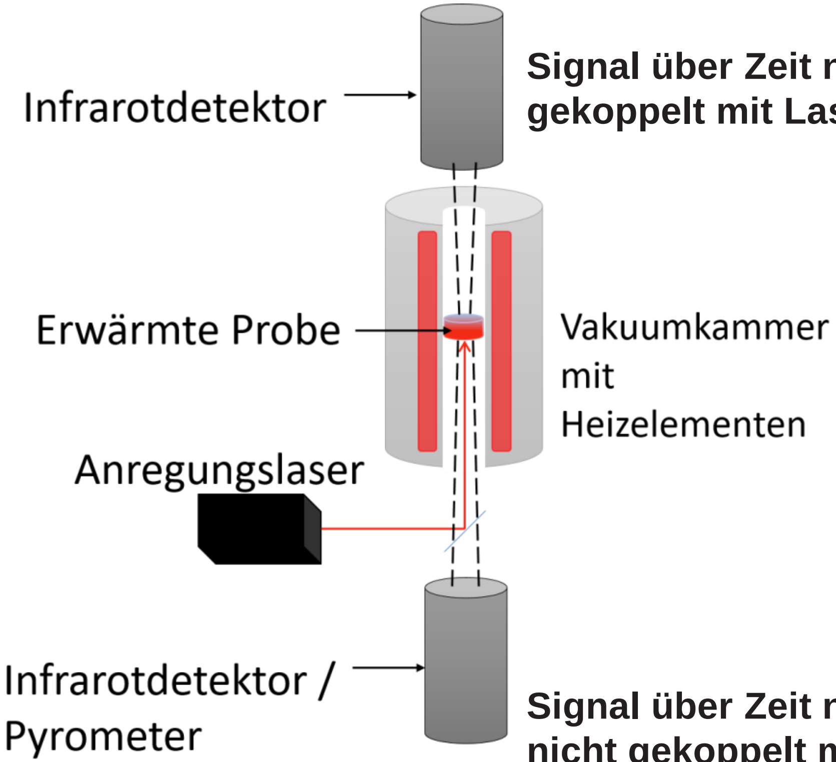
- Motivation
    - Additive Fertigung, Selektives-Laser-Schmelzen (SLS)
- LFA Setup
- Modellfindung Vorderseite
    - Temperaturentwicklung des adiabatischen Modells
- Faltungsmethoden
    - Diskrete Faltung im Frequenzraum
    - Kontinuierliche Faltung im Realraum
- Vergleich der Lösungen
- Fazit

Motivation – Additive Fertigung, SLS





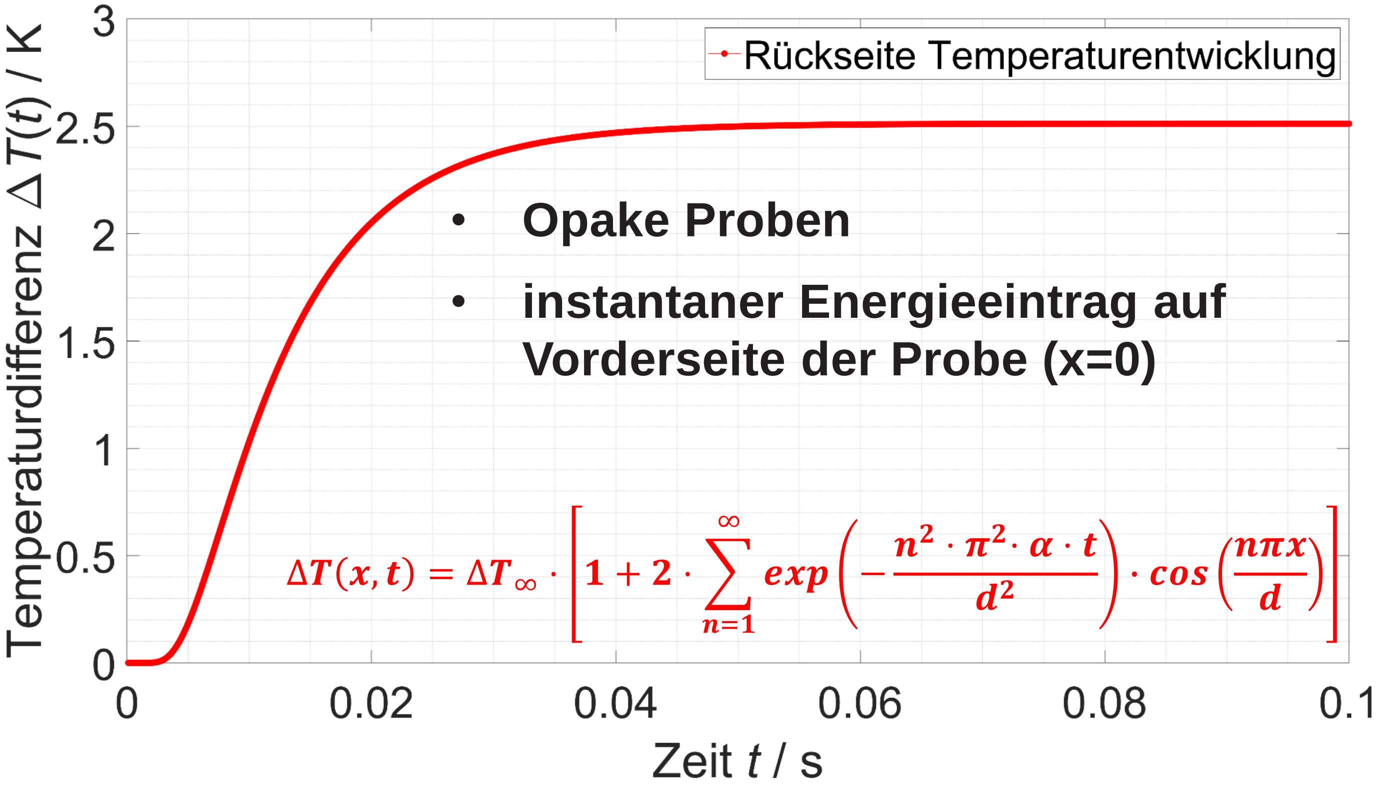
LFA Setup



Signal über Zeit nach Puls, gekoppelt mit Laser

Signal über Zeit nach Puls, nicht gekoppelt mit Laser

Adiabatisches Modell



- **Opake Proben**
- **instantaner Energieeintrag auf Vorderseite der Probe (x=0)**

$$\Delta T(x,t) = \Delta T_{\infty} \cdot \left[1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} exp\left(-\frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot \alpha \cdot t}{d^2}\right) \cdot cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\right]$$

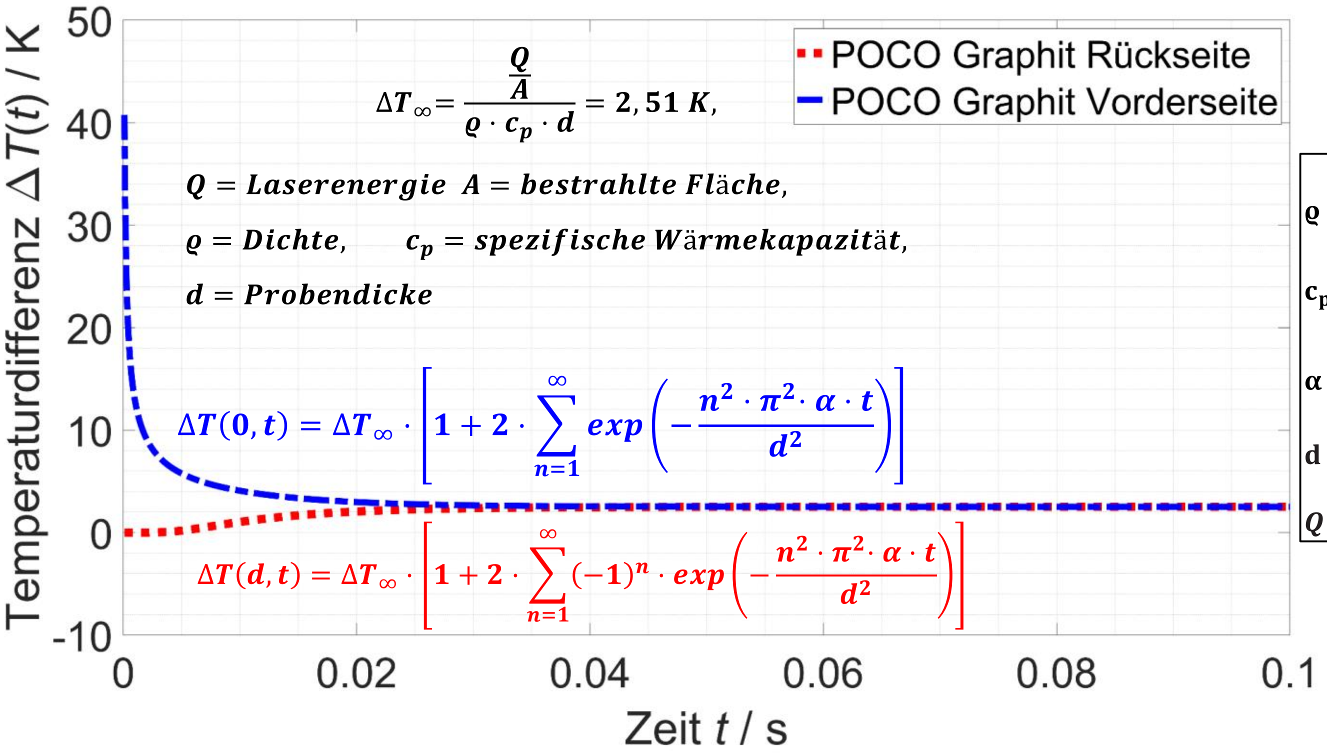
Modellfindung Vorderseite

- „Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity and Thermal Conductivity"
  W.J. Parker, R.J.Jenkins, C.P. Butler and G.L. Abott,
  Journal of Applied Physics, Vol 32, Number 9, September 1961
- Conduction of Heat in Solids (Oxford University Press, New York, 1959), 2nd ed. , p.101
  - Linear Flow of heat in the solid bounded by two parallel planes

$$\Delta T(x,t) = \frac{1}{d}\int_0^d f(x')dx' +$$

$$\frac{2}{d}\sum_{n=1}^{\infty} exp\left(-\frac{\alpha n^2\pi^2 t}{d^2}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\int_0^d f(x')cos\left(\frac{n\pi x'}{d}\right)dx'$$

Temperaturentwicklung Adiabatisches Modell



$$\Delta T_{\infty} = \frac{\frac{Q}{A}}{\varrho \cdot c_p \cdot d} = 2{,}51\ K,$$

$Q = Laserenergie \quad A = bestrahlte\ Fläche,$

$\varrho = Dichte, \qquad c_p = spezifische\ Wärmekapazität,$

$d = Probendicke$

$$\Delta T(0,t) = \Delta T_{\infty} \cdot \left[1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} exp\left(-\frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot \alpha \cdot t}{d^2}\right)\right]$$

$$\Delta T(d,t) = \Delta T_{\infty} \cdot \left[1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot exp\left(-\frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot \alpha \cdot t}{d^2}\right)\right]$$

$\varrho = 1780\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

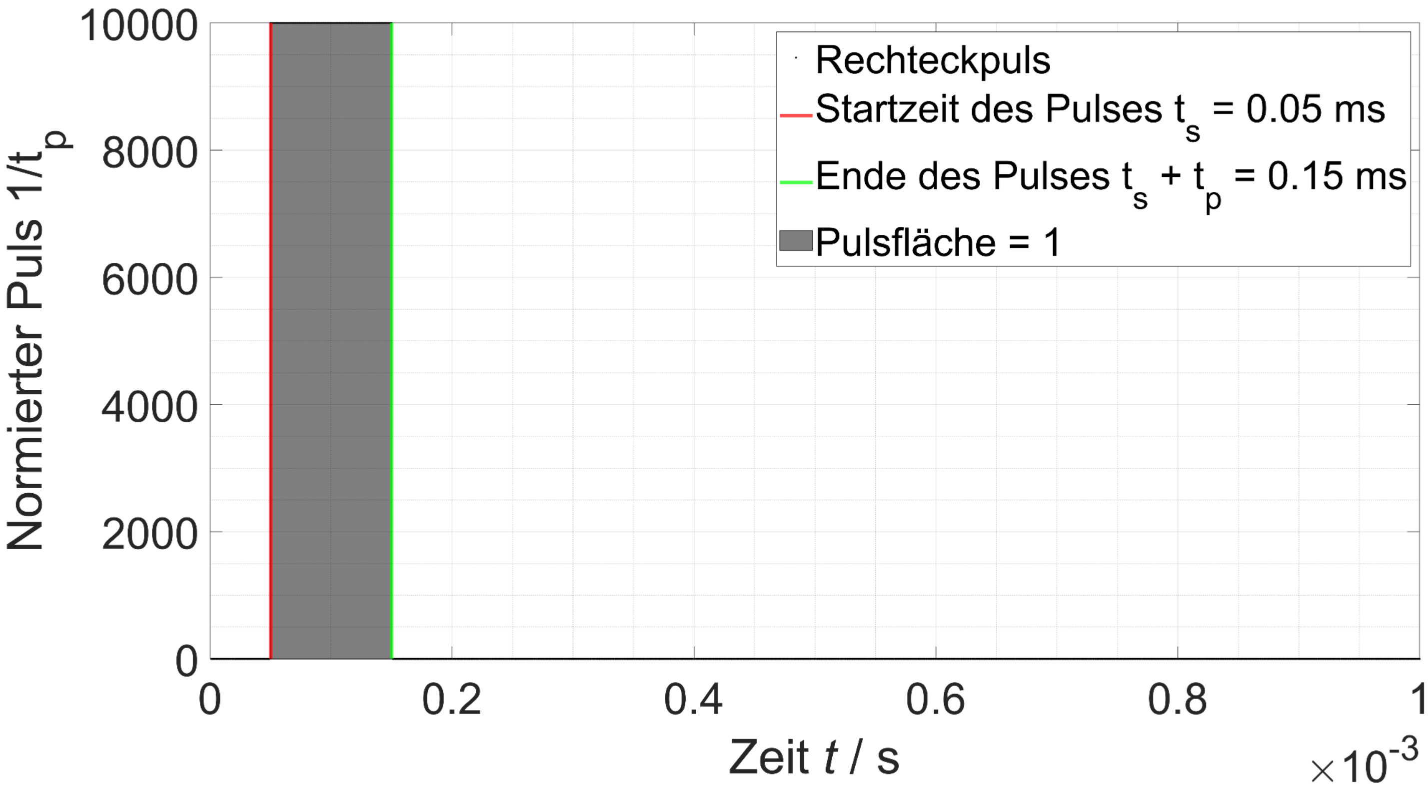
$c_p = 709\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}$

$\alpha = 75 \cdot 10^{-6}\ \frac{m^2}{s}$

$d = 2.49 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$

$Q = 1\ J$

Rechteckpuls



Faltungsmethoden

- Diskrete Faltung im Fourierraum

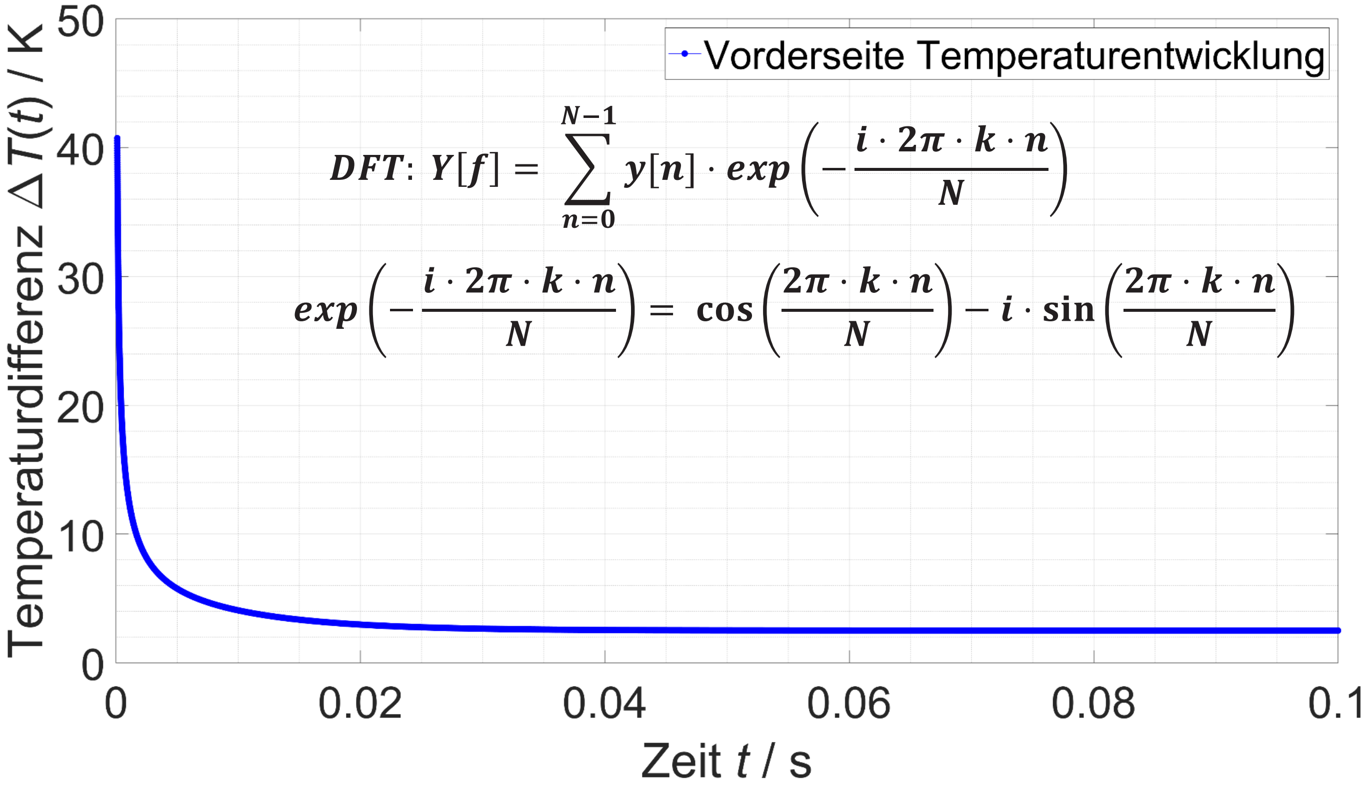
  Punktweise Multiplikation der diskreten Funktionswerte von Puls und Temperaturentwicklung im Frequenzraum

- Kontinuierliche Faltung im Realraum

  Lösung des Faltungsintegrals

  Definition von Puls und Temperaturentwicklung mathematisch kontinuierlich

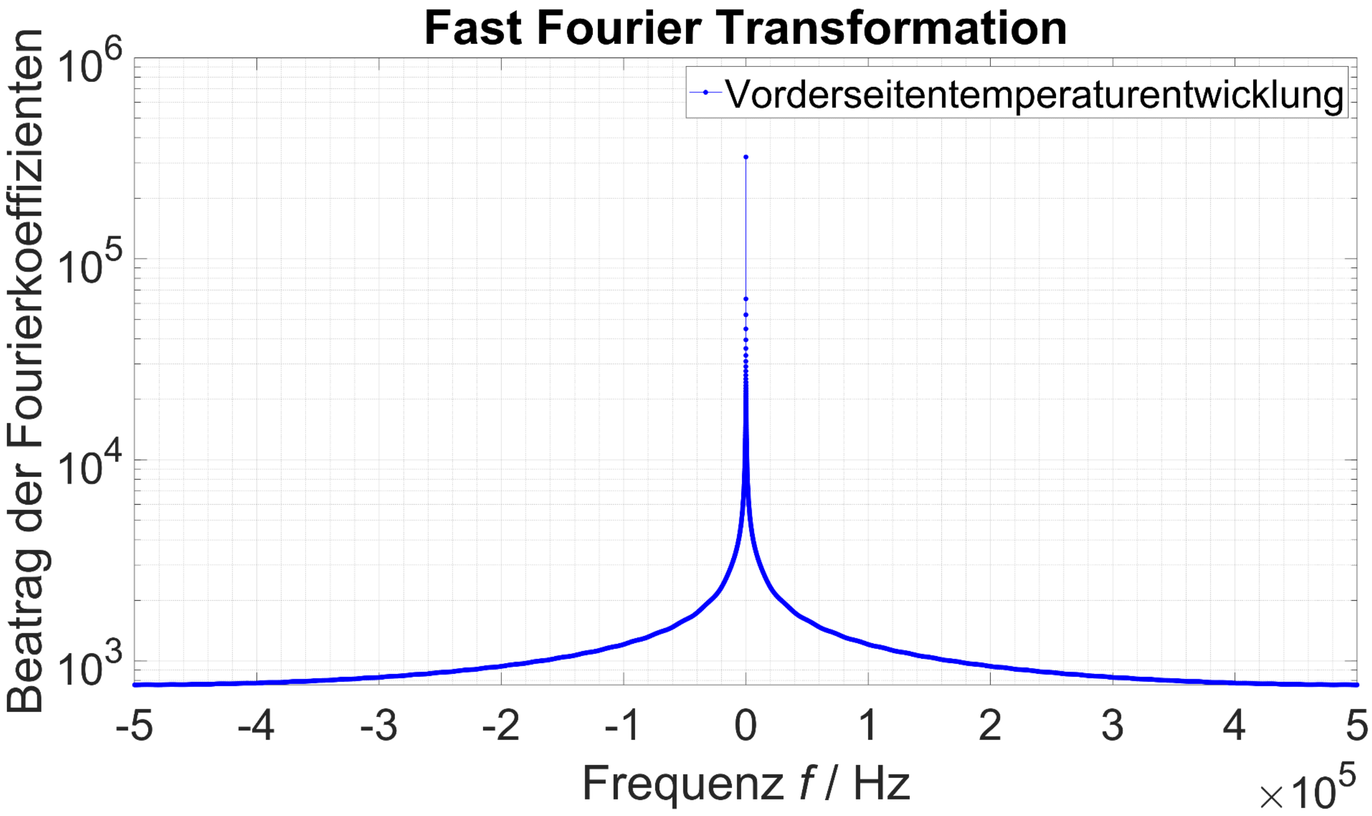
Diskrete Faltung im Frequenzraum



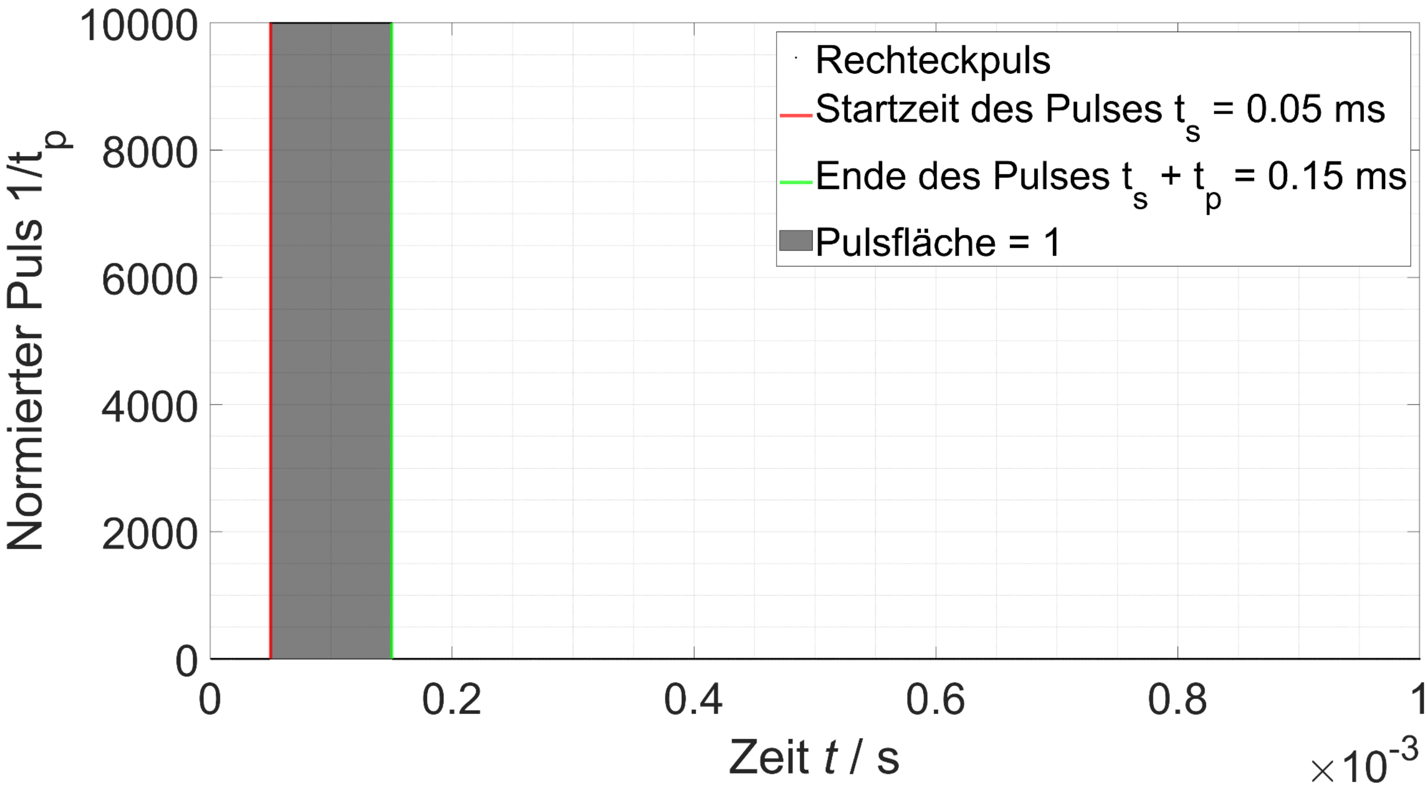
$$DFT\colon\ Y[f] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cdot exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot k \cdot n}{N}\right)$$

$$exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot k \cdot n}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}\right)$$

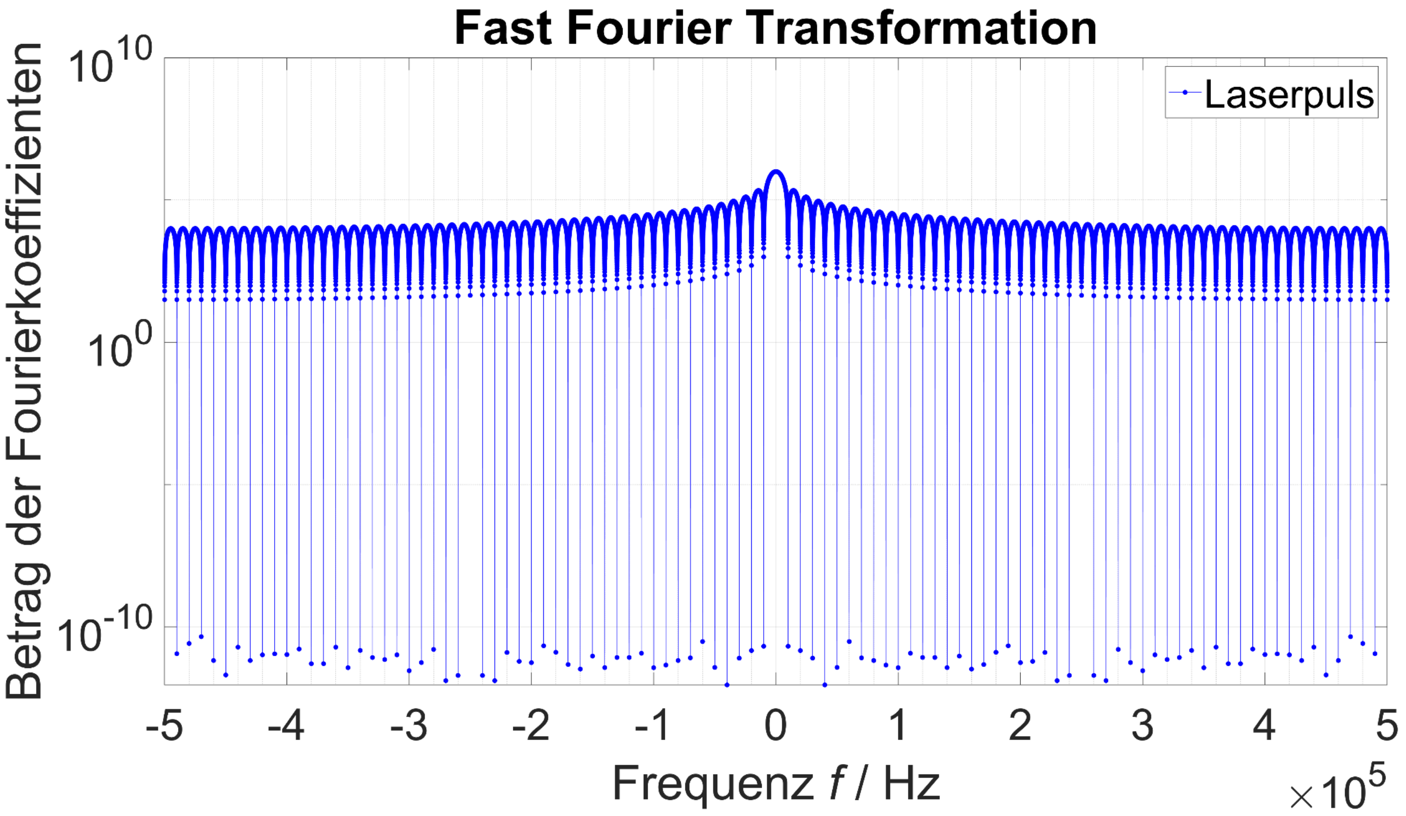
Diskrete Faltung im Frequenzraum



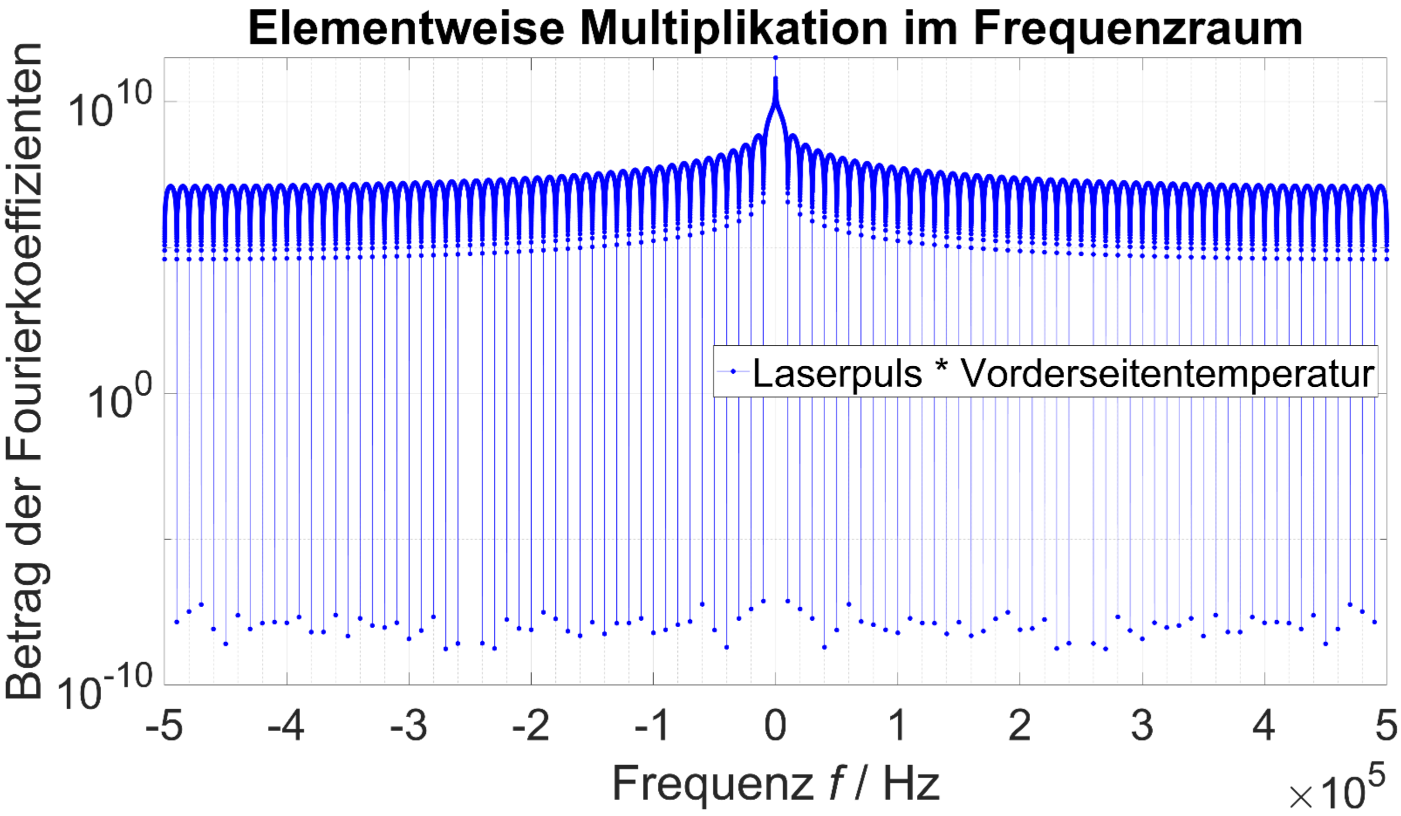
Diskrete Faltung im Frequenzraum



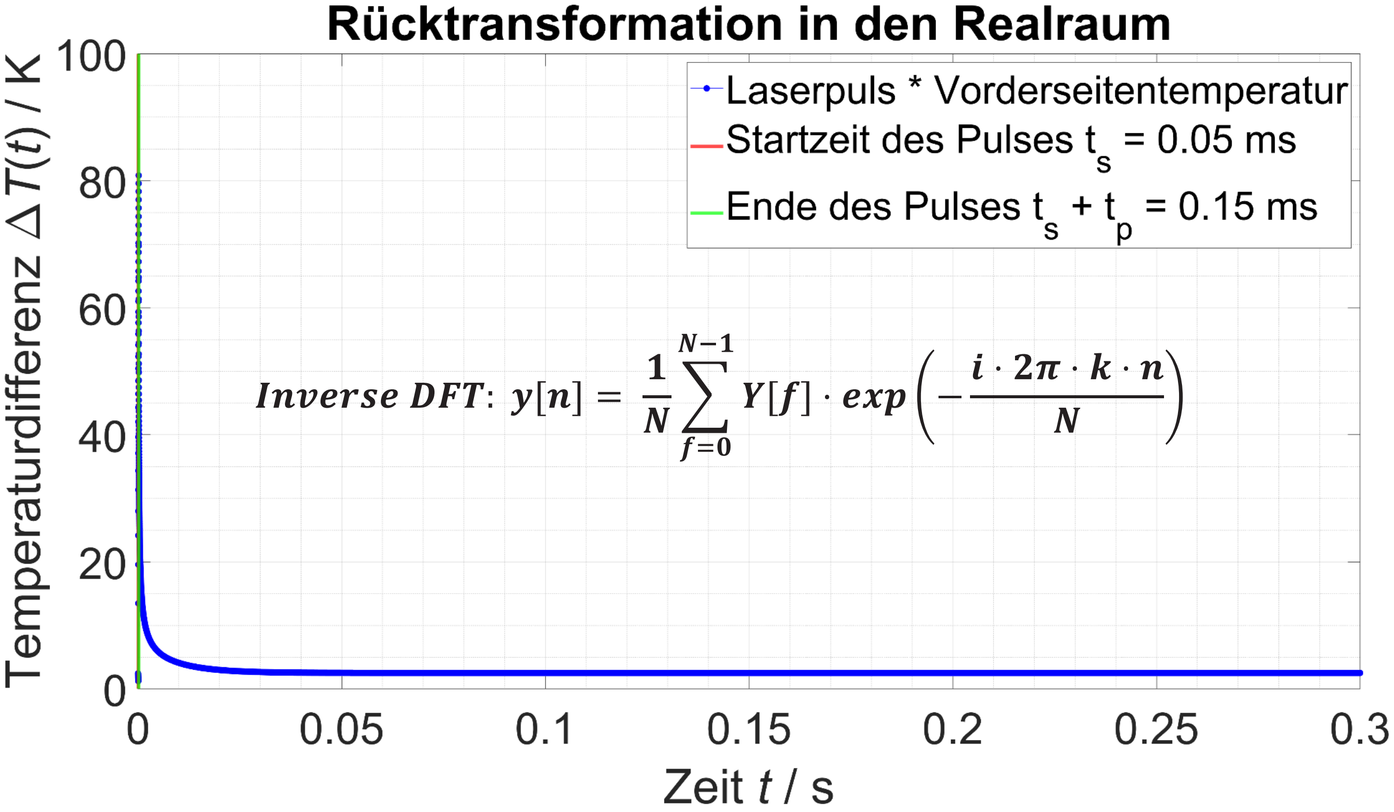
Diskrete Faltung im Frequenzraum



Diskrete Faltung im Frequenzraum

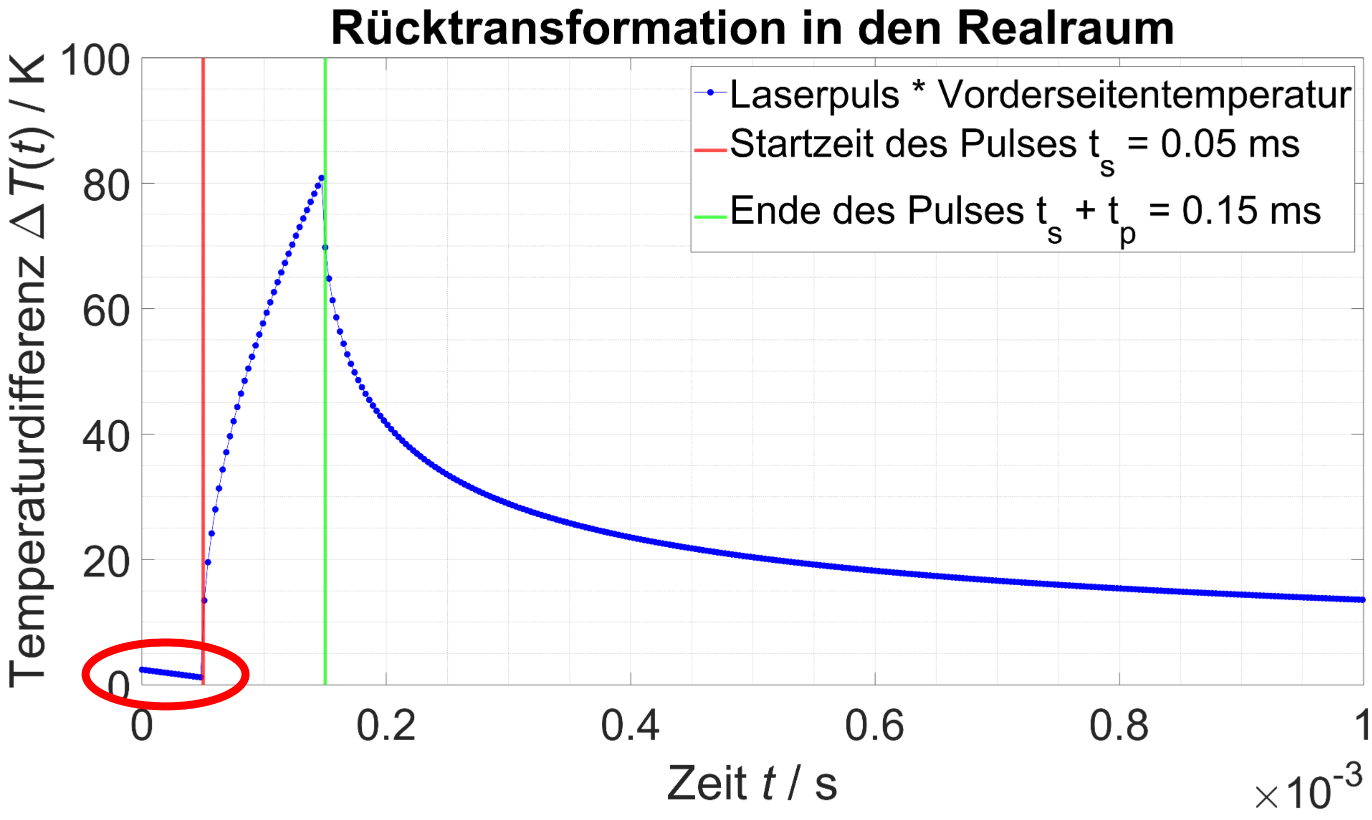


Diskrete Faltung im Frequenzraum



$$Inverse\ DFT:\ y[n] = \frac{1}{N}\sum_{f=0}^{N-1} Y[f] \cdot exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot k \cdot n}{N}\right)$$

Diskrete Faltung im Frequenzraum

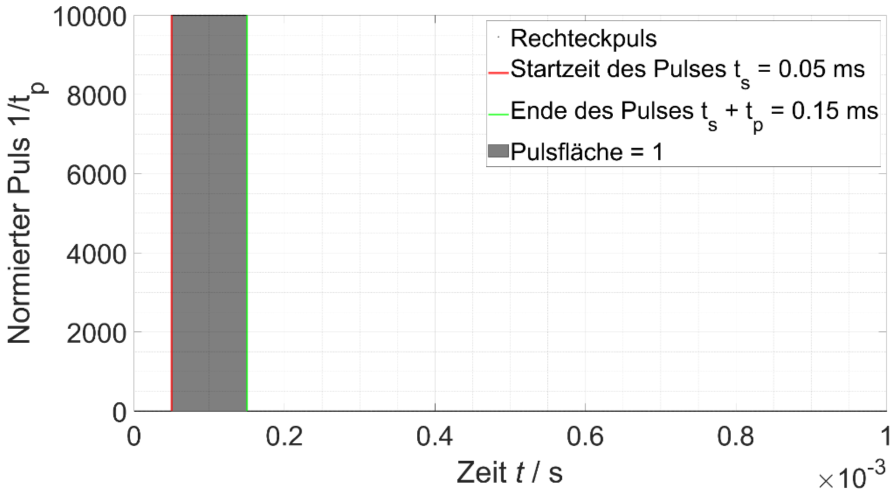


Kontinuierliche Faltung im Realraum

$$P_{\sqcap}(t) = \begin{cases} P_{\sqcap} & for\ t_s \le t \le t_s + t_p \\ 0 & for\ (t_p + t_s) < t, t < t_s \end{cases}$$

$$Q = \int_{t_s}^{t_s+t_p} P(t)\, dt = P_{\sqcap} \cdot t_p \ := \ 1\, J$$

$$\rightarrow P_{\sqcap} = \frac{1}{t_p} \frac{J}{s}$$



Kontinuierliche Faltung im Realraum

$$\Delta T_P = \int_0^{\infty} P(t') \cdot \Delta T(t-t')dt' = \int_{t_s}^{t_s+t_p} P(t') \cdot \Delta T(t-t')\, dt'$$

$$\Delta T_{f,P_{\sqcap}} = \Delta T_\infty \cdot \left[1 + \frac{2}{t_p} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^2}{\alpha n^2 \pi^2} \cdot exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{d^2}\right) \cdot \left[exp\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2 t_s}{d^2}\right) \cdot \left(exp\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2 t_p}{d^2}\right) - 1\right)\right]\right]$$

Kontinuierliche Faltung im Realraum

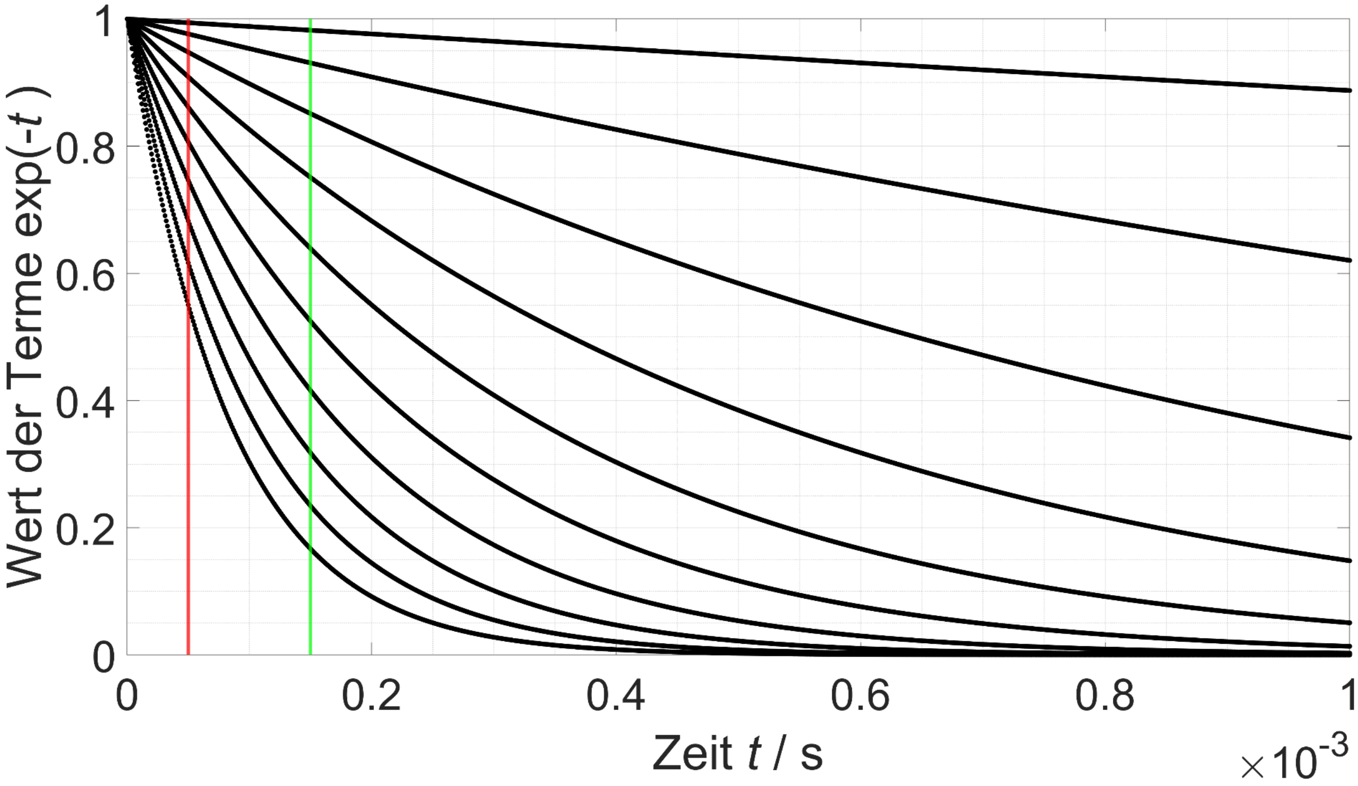
Fallunterscheidung zur Berücksichtigung des Pulseffekts

$$t < t_s\colon\ \Delta T_{f,P_\sqcap} = \Delta T_\infty \cdot \left[1 + \frac{2}{t_p} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^2}{\alpha n^2 \pi^2} \cdot exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{d^2}\right) \cdot \left[exp\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{d^2}\right) \cdot \left(exp\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2 0}{d^2}\right) - 1\right)\right]\right] = \Delta T_\infty$$

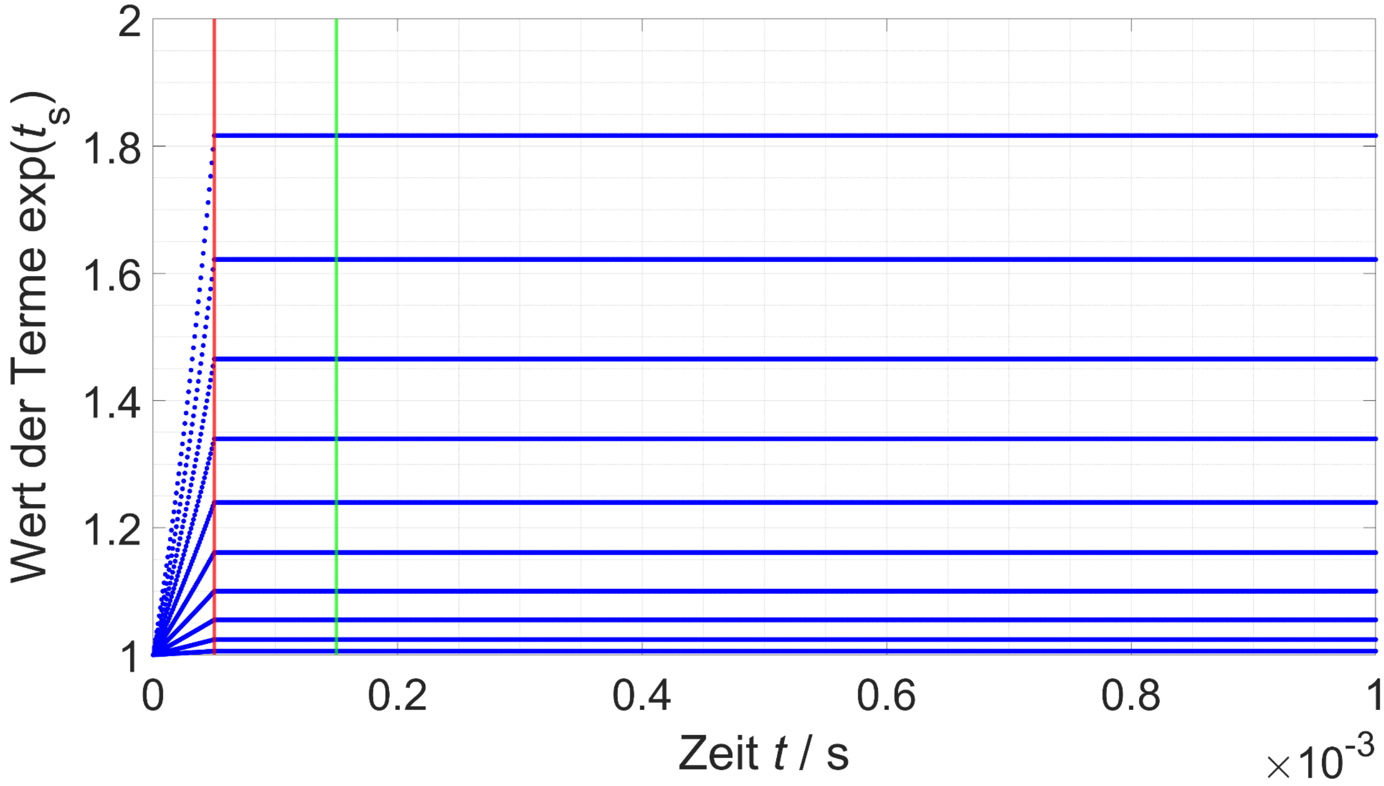
$$t_s < t < t_s + t_p\colon\ \Delta T_{f,P_\sqcap} = \Delta T_\infty \cdot \left[1 + \frac{2}{t_p} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^2}{\alpha n^2 \pi^2} \cdot exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{d^2}\right) \cdot \left[exp\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2 t_s}{d^2}\right) \cdot \left(exp\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{d^2}\right) - 1\right)\right]\right]$$

$$t > t_s + t_p\colon\ \Delta T_{f,P_\sqcap} = \Delta T_\infty \cdot \left[1 + \frac{2}{t_p} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^2}{\alpha n^2 \pi^2} \cdot exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{d^2}\right) \cdot \left[exp\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2 t_s}{d^2}\right) \cdot \left(exp\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2 t_p}{d^2}\right) - 1\right)\right]\right]$$

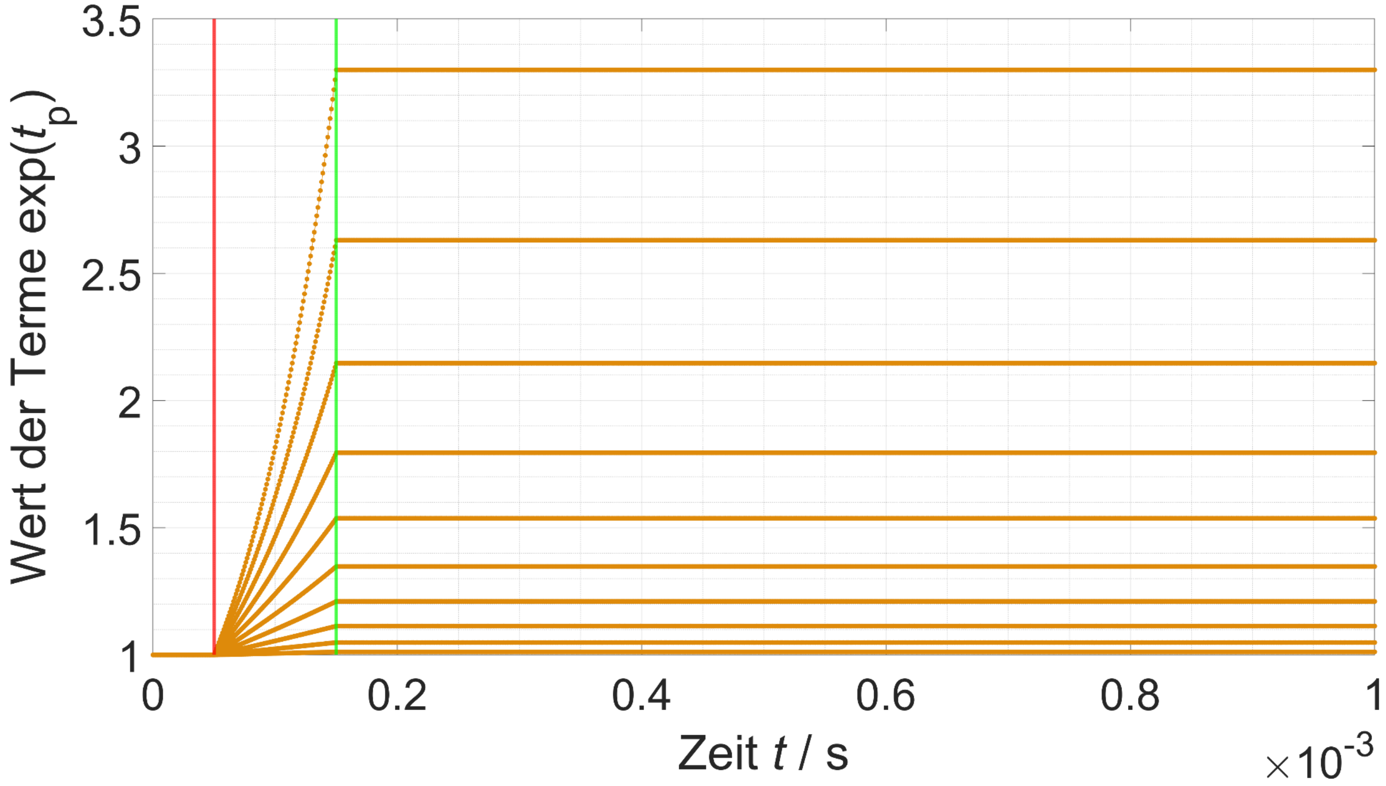
Kontinuierliche Faltung im Realraum



$$exp\left(-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{d^2}\right)$$

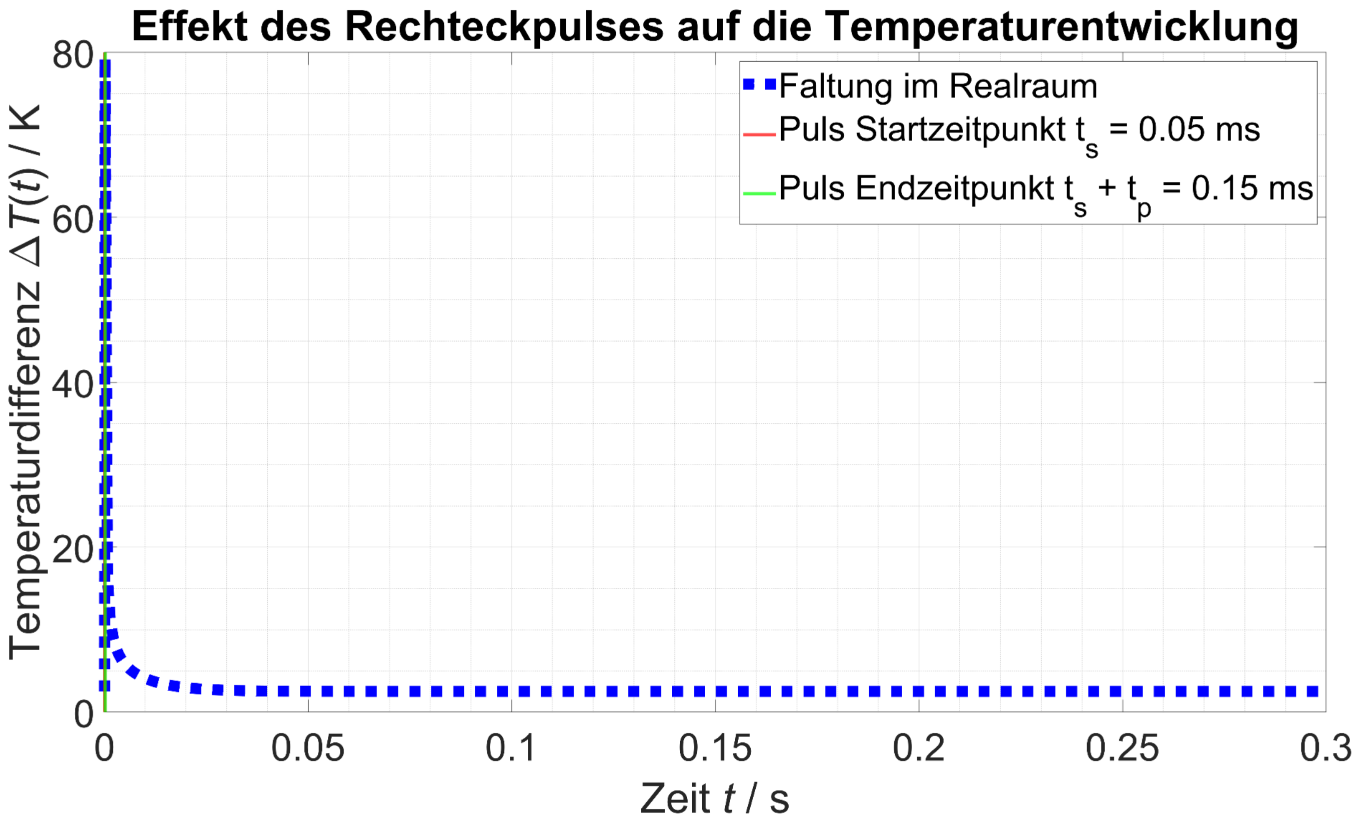


$$exp\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2 t_s}{d^2}\right)$$

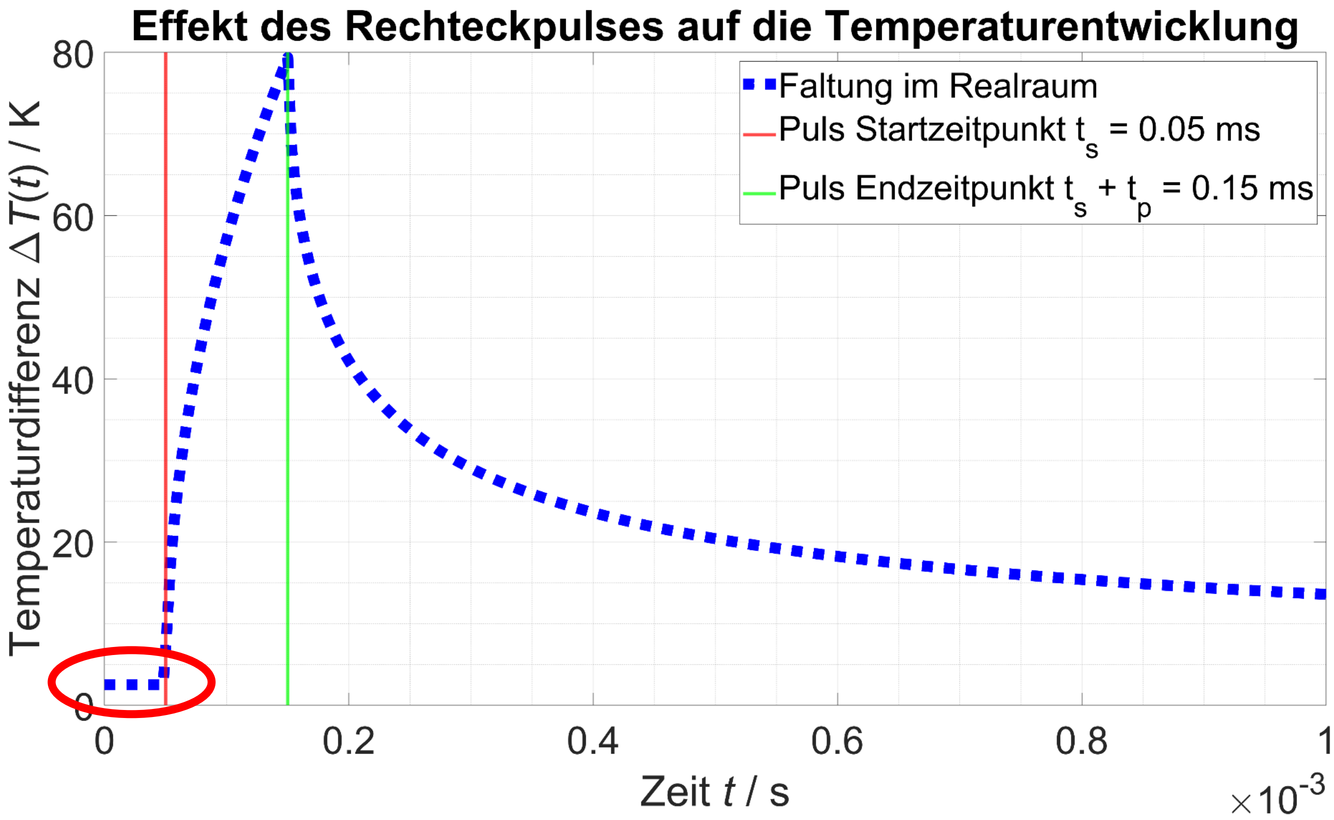


$$exp\left(\frac{\alpha n^2 \pi^2 t_p}{d^2}\right)$$

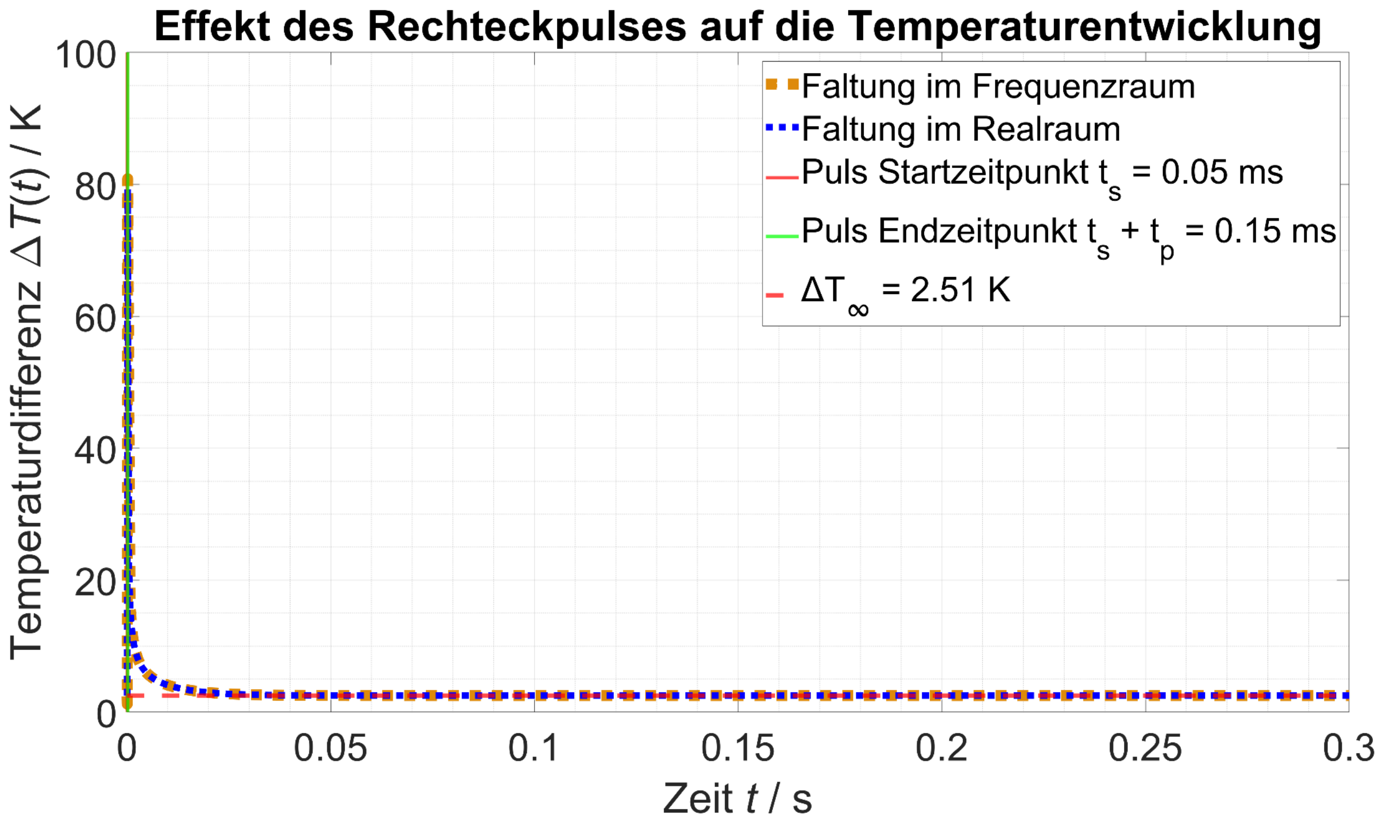
Kontinuierliche Faltung im Realraum



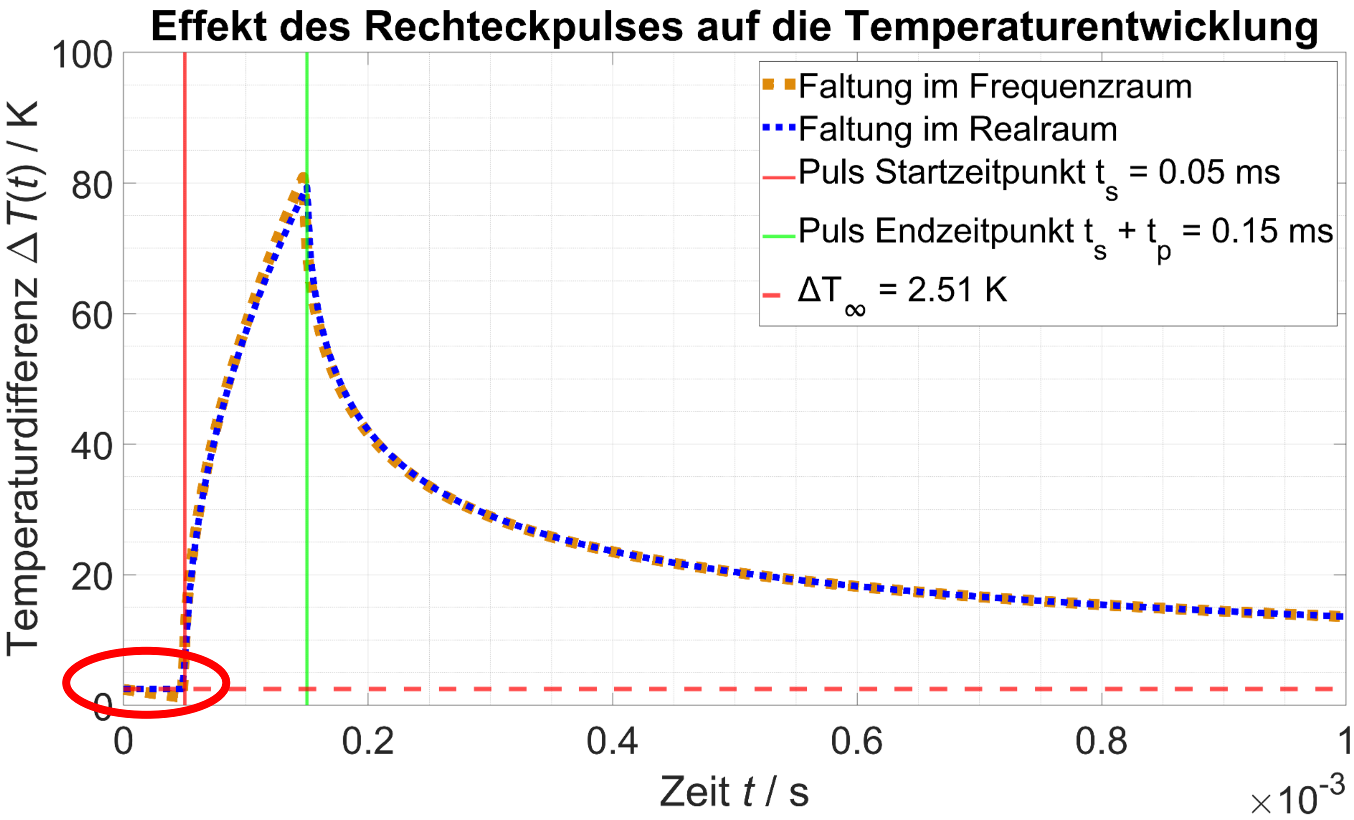
Kontinuierliche Faltung im Realraum



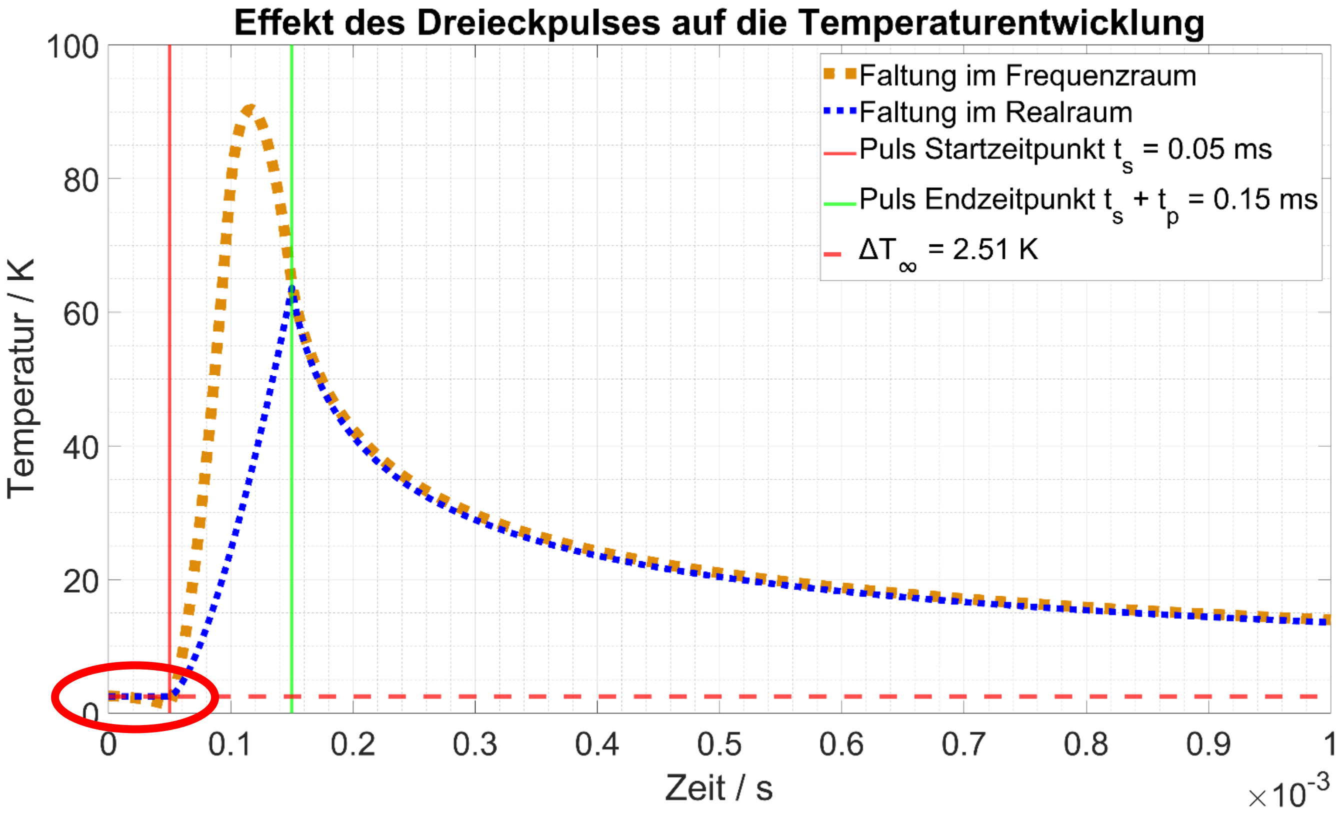
Vergleich der Lösungen



Vergleich der Lösungen



Vergleich der Lösungen



Fazit

- Modellierung im Frequenz- und Realraum zeigen sehr gute Übereinstimmung für Rechteckpuls
- Realistischere Betrachtung der Vorderseitentemperaturentwicklung durch Faltung mit endlichen Pulsen möglich
    - Kein Abfall der Vorderseitentemperatur von $\mathrm{T} = \infty$
- Kurvenverlauf für $\mathrm{t} < t_s$ aus Modellen erklärbar, aber nicht physikalisch
- Materialeigenschaften werden als konstant angenommen
- Notwendigkeit äquidistanter Datenpunkte für Fourierlösung

- TO-DO:
- Weitere Pulsformen müssen untersucht werden
    - Sägezahn, Gauss, Haifisch
- Messdatenerfassung um Modelle auf Anwendbarkeit zu testen

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit !

Amir Shandy, M. Eng
Technische Hochschule Würzburg-Schweinfurt
Institut Zero Carbon
Münzstraße 12, 97070 Würzburg

+49 931 3511-8247
amir.shandy@thws.de
www.thws.de

thws Technische Hochschule Würzburg-Schweinfurt

zero carbon